Algèbre 3 - Polynômes (cours complet)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Une construction rigoureuse de $\mathbb{K}[X]$ (hors programme, juste pour la culture)

Intuitivement, il existe un lien entre la suite $(1-3n+2n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction réelle $x \mapsto 1-3x+2x^2$, la fonction complexe $z \mapsto 1-3z+2z^2$ et la matrice $I_n - 3A + 2A^2$ où A est une matrice carrée de taille $n\times n$. Ce lien motive l'utilisation d'un objet unique $1-3X+2X^2$, qui aurait une existence indépendante, et qui permettrait par exemple de résumer toutes les égalités :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & 1-3n+2n^2 = 1+n(-3+2n) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & 1-3x+2x^2 = 1+x(-3+2x) \\ \forall z \in \mathbb{C}, & 1-3z+2z^2 = 1+z(-3+2z) \\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), & I_n - 3A + 2A^2 = I_n + A(-3I_n + 2A) \end{cases}$$

en une seule : $\boxed{1-3X+2X^2 = 1+X(-3+2X)}$.

Cela nécessite de construire rigoureusement un ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et en particulier de donner un sens formel clair à l'indéterminée X. Une idée simple pour cette construction apparaît en 1321 dans les ouvrages du mathématicien arabe Ibn al-Banna. Elle consiste à remarquer qu'un polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ peut être décrit par la liste de ses coefficients : $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et c'est donc ainsi qu'il peut être défini. L'indéterminée X est alors définie comme étant la liste $(0,1)$ pour correspondre à l'égalité $X = 0 + 1X$.

Par suite, et pour des raisons de commodité technique, on préférera représenter un polynôme non pas par la liste finie de ses coefficients mais par une suite infinie, mais dont les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang. Autrement dit, la définition formelle de $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ est la suite $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$.

La construction proposée ici repose donc sur ce principe. Nous n'en présentons que la colonne vertébrale, mais les parties omises ne sont que des vérifications techniques sans difficulté.

Plan de la construction

- **Etape 1 : définition**
  On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ dont les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang. Si a_{n_0} est le dernier terme non nul de la suite, on dit que n_0 est le **degré** de P, noté $\deg(P)$. Si tous les termes sont nuls, on pose $\deg(P) = -\infty$.

- **Etape 2 : opérations algébriques**
  Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux polynômes, on définit leur :
  — **somme** $P + Q$ comme étant la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
  — **produit** $P \times Q$ comme étant la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
  On vérifie alors qu'il s'agit d'opérations associatives, commutatives, et que $\times$ est distributive sur $+$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit également le **produit extérieur** $\lambda \times P$ comme étant la suite $\lambda P = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Etape 3 : définition de X et de ses puissances**
  On définit le polynôme 1 comme étant la suite

$$1 := (\mathbf{1}, 0, 0, 0, \dots)$$

qui se trouve être un élément neutre pour le produit, et le polynôme X comme étant la suite

$$X := (0, \mathbf{1}, 0, 0, \dots)$$

On calcule alors les puissances de ce polynôme avec le produit défini précédemment :

$$\begin{aligned} X^2 &= (0, 0, \mathbf{1}, 0, 0, \dots) \\ X^3 &= (0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \dots) \\ X^4 &= (0, 0, 0, 0, \mathbf{1}, 0, \dots) \\ &\vdots \\ X^n &= (0, 0, 0, \dots, 0, \mathbf{1}, 0 \dots) \qquad \text{(le 1 est en position } n+1) \end{aligned}$$

- **Etape 4 : forme générale des polynômes**
  Pour tout polynôme $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, on remarque alors :

$$\begin{aligned} P &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \\ &= (a_0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + (0, 0, a_2, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) \\ &= a_0 \underbrace{(\mathbf{1}, 0, 0, \dots)}_{1 = X^0} + a_1 \underbrace{(0, \mathbf{1}, 0, \dots)}_{X} + a_2 \underbrace{(0, 0, \mathbf{1}, 0, \dots)}_{X^2} + \dots + a_n \underbrace{(0, \dots, 0, \mathbf{1}, 0, \dots)}_{X^n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{aligned}$$

C'est gagné ! On a construit rigoureusement un ensemble qui vérifie exactement ce qu'on attend de lui.

2 Généralités sur l'ensemble $\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$

Définition (non rigoureuse mais usuelle de $\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$)**.** *Un polynôme est une expression de la forme* $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$*, où :*

- $n \in \mathbb{N}$ *;*
- $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *sont les* ***coefficients*** *de* P *;*
- X *est un objet formel, appelé parfois l'****indéterminée****, pour des raisons historiques ayant peu de pertinence aujourd'hui.*

Un polynôme est entièrement caractérisé par ses coefficients, de sorte que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}[X]$*. Il est muni des opérations internes + et × usuelles, et du produit externe usuel (i.e. du produit* $\lambda \times P$*, où* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$*).*
(Voir partie précédente pour une définition plus rigoureuse)

Remarque. *Dans* $\mathbb{K}[X]$*, les opérations + et × vérifient les mêmes propriétés de commutativité, associativité et distributivité que dans* $\mathbb{K}$*. En revanche,* $\mathbb{K}[X]$ *n'est pas muni d'une division. De là, toutes les formules algébriques ne faisant intervenir que des additions, soustractions et multiplications sont vraies dans* $\mathbb{K}[X]$ *; en particulier :*

- **Binôme de Newton :** *pour tous* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$ *;*
- **Factorisation :** *pour tous* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$*.*
- **Sommes géométriques :** *On a bien* $1 - P^{n+1} = (1-P) \sum_{k=0}^{n} P^k$*, mais ici, on ne peut pas diviser par* $1 - P$*.*

Vocabulaire. *Si* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, *avec* $a_n \neq 0$:

- n *est le* **degré** *de* P, *noté* $n = \deg(P)$. *Par convention,* $\deg(0) = -\infty$.
- a_n *est le* **coefficient dominant**.
- *Si* $a_n = 1$, *on dit que* P *est* **unitaire**.
- *Si* $Q \in \mathbb{K}[X]$, *le* **polynôme composé** $P \circ Q$ *est le polynôme* $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exemple : $\left(X^3 - X + 2\right) \circ \left(X^2 + 1\right) = \left(X^2 + 1\right)^3 - \left(X^2 + 1\right) + 2$.

Proposition (Propriétés du degré)**.** *Soit* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, *avec égalité sauf si* P *et* Q *sont de même degré et ont des coefficients dominants opposés.*
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- *Si* $\deg(Q), \deg(P) \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Démonstration. Simples vérifications en utilisant la définition. □

Remarques.

- *À noter que les deux premières propriétés restent vraies si* $P = 0$ *ou* $Q = 0$. *La troisième propriété peut être fausse lorsque* Q *est de degré 0 (c-à-d* Q *constant non nul), car* $P \circ Q$ *peut alors valoir le polynôme nul, et donc être de degré* $-\infty$.
- *Dès que* $\deg(Q) < \deg(P)$, *on a* $\deg(P+Q) = \deg(P)$, *car le coefficient dominant de* $P+Q$ *est celui de* P.
- *Si* $PQ = 0$, *alors* $P = 0$ *ou* $Q = 0$, *car sinon, le degré de* $P \times Q$ *ne pourrait valoir* $-\infty$.
  Cela permet des simplifications du type $PR = QR \implies P = Q$ *dès que* $R \neq 0$ *(polynôme nul). En effet :*

$$PR = QR \implies (P-Q)R = 0 \implies P - Q = 0 \text{ ou } \underbrace{R = 0}_{\text{impossible}} \implies P = Q$$

Exemples :

$$\deg\left((2X^3 - 6X^2 + X) \times (3X^2 + 1)\right) = 5$$
$$\deg\left((2X^3 - 6X^2 + X) \circ (3X^7 + X^4)\right) = 21$$

Définition (Fonction polynomiale)**.** *Si* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, *alors la fonction*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k \boldsymbol{x}^k \end{array}$$

est appelée **fonction polynomiale associée à** $\boldsymbol{P}$.

Traditionnellement, on note aussi cette fonction P *(il s'agit d'un abus de langage toléré).*

Exemple : dans $\mathbb{R}[X]$, si $P = X^2 + 3$, la fonction polynomiale associée à P est : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 3 \end{array}$.

3 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition. *Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B* ***divise*** *A (notation : $B \mid A$) s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On dit alors que A est un* ***multiple*** *de B.*

Exemple : X divise $X^3 - X$ car $X^3 - X = X\left(X^2 - 1\right)$.
$X + 2$ divise $X^2 - 4$ car $X^2 - 4 = (X+2)(X-2)$.

Théorème (Division euclidienne)**.** *Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$.*
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} A = BQ + R \\ \deg(R) \leqslant \deg(B) - 1 \end{array}\right.$$

Exemple : effectuons la division euclidienne de $A := 3X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 3X + 1$ par $B := X^2 + X + 2$.

$$\begin{array}{r|l} 3X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 3X + 1 & X^2 + X + 2 \\ \cline{2-2} -3X^4 - 3X^3 - 6X^2 & 3X^2 + 2X + 1 \\ \hline 2X^3 + 3X^2 + 3X & \\ -2X^3 - 2X^2 - 4X & \\ \hline X^2 - X + 1 & \\ -X^2 - X - 2 & \\ \hline -2X - 1 & \end{array}$$

Le travail réalisé ici prouve que :

$$A - (3X^2 B) - (2XB) - B = -2X - 1$$

et donc : $\boxed{A = B\underbrace{\left(3X^2 + 2X + 1\right)}_{=:Q} + \underbrace{\left(-2X - 1\right)}_{=:R}}$

Démonstration. (du théorème théorique)

1. (Démonstration de l'existence)

   On fixe $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ et on raisonne par récurrence forte sur le degré de A.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $H(n)$:

   « Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\left\{\begin{array}{l} A = BQ + R \\ \deg(R) \leqslant m - 1 \end{array}\right.$ »

   - **Initialisation :** Pour les $n \leqslant m - 1$, c'est évident, puisque $A = B \times 0 + \underbrace{A}_{\deg(A) \leqslant m-1}$.
   - **Hérédité :** Soit $n \geqslant m - 1$. Supposons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $H(k)$ est vraie.

     Soit $A = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$ un polynôme de degré $n + 1$.

     Pour pouvoir utiliser $H(n)$, on cherche à retrancher à A un multiple de B, de sorte à annuler son terme de degré $n + 1$. Schématiquement, l'opération à faire est la suivante :

$$\begin{array}{l|l} \boxed{a_{n+1}X^{n+1} + \cdots} \ (A) & \boxed{b_m X^m + \cdots} \ (B) \\ \cline{2-2} -a_{n+1}X^{n+1} + \cdots & \boxed{\frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m}} \ (\widetilde{Q}) \\ \cline{1-1} \boxed{0 \quad + (*)X^n + \cdots} \ (\widetilde{A}) & \end{array}$$

Plus précisément :

- $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ est de degré m, et son coefficient en X^m est b_m.
- Donc $X^{n+1-m}B$ est de degré $n+1$, de coefficient dominant b_m.
- Donc le polynôme $\underbrace{\frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n+1-m}}_{=:\widetilde{Q}} B$ est de degré $n+1$, de coefficient dominant a_{n+1}.

On pose alors $\widetilde{A} := A - \widetilde{Q}B$. Le polynôme $\widetilde{A}$ est de degré inférieur à n, car son coefficient de degré $n+1$ est $a_{n+1} - a_{n+1} = 0$.
On lui applique l'hypothèse de récurrence : il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\widetilde{A} = BQ + R$ et $\deg(R) \leqslant m-1$.
Donc $A - \widetilde{Q}B = BQ + R$, et donc $A = B \underbrace{\left(\widetilde{Q} + Q\right)}_{\in \mathbb{K}[X]} + R$, avec $\deg(R) \leqslant m-1$.

$H(n+1)$ est bien démontrée.

▶ Conclusion, $H(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (Démonstration de l'unicité)
Si $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) \leqslant m-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} A = B\widetilde{Q} + \widetilde{R} \\ \deg\left(\widetilde{R}\right) \leqslant m-1 \end{cases}$, alors :

$$BQ + R = B\widetilde{Q} + \widetilde{R} \qquad \text{et donc} \qquad \underbrace{B}_{\deg = m} \left(Q - \widetilde{Q}\right) = \underbrace{\widetilde{R} - R}_{\deg \leqslant m-1}$$

L'égalité des degrés donne : $m + \deg\left(Q - \widetilde{Q}\right) \leqslant m - 1$, ce qui est impossible sauf si $Q = \widetilde{Q}$ (car alors $\deg(Q - \widetilde{Q}) = -\infty$). D'où $\boxed{Q = \widetilde{Q}}$.
De là, on obtient $R - \widetilde{R} = B\left(Q - \widetilde{Q}\right) = 0$, et donc $\boxed{R = \widetilde{R}}$.

□

Cf exo 1

Remarque. *Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.*
B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Remarque. *Soit B un diviseur de A (autrement dit, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$), où A est de degré $n \in \mathbb{N}$.*
Si B est de degré n, alors par égalité des degrés dans $A = BQ$, le polynôme Q est de degré 0, c-à-d $Q = \lambda \in \mathbb{K}^*$, et donc, $B = \frac{1}{\lambda} A$.
On dit que B est « proportionnel » à A.
Dans ce cas, $A = BQ$ signifie $A = \left(\frac{1}{\lambda} A\right) \times \lambda$.

Définition. *Un* **diviseur strict** *de $A \in \mathbb{K}[X]$ est un diviseur qui n'est :*
- ▶ *ni une constante non nulle ;*
- ▶ *ni proportionnel à A (c-à-d du type λA, pour un $\lambda \in \mathbb{K}^*$).*

Autrement dit, $B \in \mathbb{K}[X]$ est un diviseur strict de A si :
- ▶ *B divise A ;*
- ▶ *$1 \leqslant \deg(B) \leqslant n - 1$, où $n := \deg(A)$.*

Définition. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur à 1 est dit* **irréductible** *s'il n'admet aucun diviseur strict.*

NB : cette notion de polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ est l'analogue de celle des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

4 Dérivation dans $\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$

Définition (Polynôme dérivé)**.** *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Le **polynôme dérivé** *de P est défini par :*

$$P' := \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j,$$

avec le changement d'indice $j = k - 1$.

Remarque. *Il s'agit de la formule que l'on obtiendrait avec une dérivation classique en analyse (la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$), mais cette définition est purement algébrique. Elle permet par exemple de parler de P' même lorsqu'il s'agit de manipuler des polynômes de matrices.*

Exemple : $\left(2X^3 - 6X - 1\right)' = 6X^2 - 6$.

Notation. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et $n \in \mathbb{N}$. On note $P^{(n)}$ la dérivée n-ième de P.*

Propriétés. *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

1. *Si $P' = Q'$, alors P et Q diffèrent d'une constante.*
2. $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant} \end{cases}$
3. **Linéarité de la dérivation :** $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
4. **Dérivée du produit :** $(P \times Q)' = P'Q + PQ'$.
5. **Dérivée de la composée :** $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \times Q'$
6. *La* **formule de Leibniz** *est valable dans le cadre des polynômes.*

Démonstration.

1. L'égalité $P' = Q'$ donne l'égalité de tous les coefficients de P et de Q, sauf celui de degré 0 (qui n'apparait plus dans l'expression de la dérivée).
2. Conséquence immédiate de la définition.
3. Il s'agit d'une vérification sans difficulté, en posant $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$.
4. Vérification technique, avec manipulation de sommes doubles, due au produit.
5. D'abord démontrer que $(Q^k)' = kQ^{k-1}Q'$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, puis un calcul direct en posant $P = \sum a_k X^k$.
6. Démonstration identique au cas des fonctions, puisque les règles de calcul sont les mêmes.

□

Cf exo 2

Théorème (Formule de Taylor)**.** *Soit $P \in \mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$ de degré $\leqslant n$, et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\begin{aligned} P &= P(\alpha) + P'(\alpha)(\boldsymbol{X} - \alpha) + \frac{P^{(2)}(\alpha)}{2!}(\boldsymbol{X} - \alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(\boldsymbol{X} - \alpha)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(\boldsymbol{X} - \alpha)^k \end{aligned}$$

ou autrement dit :

$$P(\alpha + \boldsymbol{X}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \boldsymbol{X}^k$$

Démonstration. Pour "se ramener en 0", posons :

$$Q = P(\alpha + X) \qquad \text{(composition "}P\textbf{ de }\alpha+X\text{", c-à-d } P\circ(\alpha+X))$$

Il s'agit d'un polynôme de même degré que P, qui vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$: $Q^{(k)} = P^{(k)}(\alpha + X)$, et donc en particulier $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(\alpha)$. La formule à démontrer devient :

$$Q = Q(0) + Q'(0).X + \frac{Q^{(2)}(0)}{2!}.X^2 + \cdots + \frac{Q^{(n)}(0)}{n!}.X^n$$

ou encore :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}.X^k$$

Si l'on note $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ les coefficients de Q, on a

$$Q = \sum_{k=0}^{n} b_k.X^k$$

On veut donc démontrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $\frac{Q^{(i)}(0)}{i!} = b_i$. Or, si l'on fixe $i \in [\![0, n]\!]$, on remarque que l'on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(X^k)^{(i)} = \left| \begin{array}{l} k(k-1)\cdots(k-(i-1))X^{k-i} = \dfrac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} \qquad \text{si } i \leqslant k \\ 0 \qquad \text{si } i > k \end{array} \right.$$

Donc par linéarité de la dérivation :

$$Q^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} b_k.(X^k)^{(i)} = \sum_{k=\boldsymbol{i}}^{n} b_k.\frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i}$$

Si l'on évalue cette égalité en 0, tous les X^{k-i} donnent 0, **sauf pour $\boldsymbol{k = i}$**, où $X^{k-i} = X^0 = 1$. D'où :

$$Q^{(i)}(0) = b_i.\frac{i!}{(i-i)!} = b_i.i!$$

et donc $\boxed{\dfrac{Q^{(i)}(0)}{i!} = b_i}$. □

Cf exo 3

Remarque. *La formule de Taylor est fondamentale dans la compréhension des polynômes. Elle implique que :*

- *pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, tout polynôme peut être exprimé dans la base $\big(1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \ldots\big)$, c'est-à-dire comme combinaison linéaire de 1, $X - \alpha$, $(X-\alpha)^2$,... ;*
- *les coefficients étant les $\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$, un polynôme est entièrement caractérisé par ses dérivées successives au point α. Pour comparaison, ce n'est par exemple pas le cas d'une fonction, même une fonction $\mathcal{C}^\infty$, pour qui le comportement au voisinage d'un point α ne contraint en rien ce qui se passe ailleurs (à méditer) ;*
- *lorsque $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, les coefficients a_k peuvent être interprétés avec les dérivées de P en 0 :*

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

5 Racines

5.1 Racines simples

Définition. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.*

Théorème (Caractérisation des racines)**.** *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a l'équivalence :*

$$\alpha \text{ racine de } P \iff (X-\alpha) \text{ divise } P$$

Démonstration.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $P(\alpha) = 0$. Par la formule de Taylor, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{P(\alpha)}_{=0} + (X-\alpha)P'(\alpha) + (X-\alpha)^2 \frac{P''(\alpha)}{2} + \cdots + (X-\alpha)^n \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} \\ &= (X-\alpha)\left(P'(\alpha) + (X-\alpha)\frac{P''(\alpha)}{2} + \cdots + (X-\alpha)^{n-1}\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $(X-\alpha)$ divise P.

$\boxed{\Leftarrow}$ S'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$, alors $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$. □

Exercice :

1. Si α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{K}$ sont trois racines distinctes d'un polynôme P, montrer que P est divisible par $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$.
2. Même exercice avec α_1, α_2, $\cdots$, $\alpha_p \in \mathbb{K}$.

Cf exo 4

Théorème. *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré $n \in \mathbb{N}$ ($P \neq 0$), alors le nombre r de ses racines est inférieur à n.*

Démonstration. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ les racines (distinctes) de P. On a vu que, dans ce cas, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\underbrace{P}_{\deg n} = \underbrace{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_r)}_{\deg r} \times Q$$

L'égalité des degrés donne donc $n = r + \deg(Q)$ et donc $r \leqslant n$. □

- **Conséquence :** si un polynôme P de degré inférieur à $n \in \mathbb{N}$ admet $n+1$ racines, alors il s'agit du polynôme nul.

  Démonstration. Par l'absurde, si P n'est pas nul, alors par le théorème précédent, il a au maximum n racines, d'où une contradiction. □

- **Conséquence de la conséquence :** si deux polynômes P et Q de degrés inférieurs à $n \in \mathbb{N}$ coïncident sur $n+1$ valeurs, alors ils sont égaux.

  Démonstration. S'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ distincts tq $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors le polynôme $P - Q$ vérifie pour tout i que $(P-Q)(\alpha_i) = 0$, ce qui met en évidence qu'il admet $n+1$ racines. Or, il est de degré inférieur à n. Ce n'est donc possible que si $P - Q$ est le polynôme nul. D'où $P - Q = 0$, et donc $P = Q$. □

- **Conséquence de la conséquence de la conséquence :** si deux polynômes P et Q coïncident sur une infinité de valeurs, alors ils sont égaux.

  En particulier, cela montre que la fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ d'un polynôme P caractérise ce polynôme, puisque si deux polynômes P et Q ont la même fonction polynomiale, cela signifie qu'ils coïncident sur toutes les valeurs de $\mathbb{K}$, et donc sur une infinité de valeurs. Ils sont donc égaux.

  Cf exo 5

5.2 Racines multiples

Définition. *On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine multiple de $P \in \mathbb{K}[X]$ s'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $(X-\alpha)^k$ divise P.*

De façon générale, si α est une racine de P, la **multiplicité** *de α (ou* **ordre** *de α) est le plus grand entier k tel que $(X-\alpha)^k$ divise P.*

Exemple : Considérons $P = X^2 - 4$ et $Q = X^3 - 4X^2 + 4X$.
On remarque que 2 est racine de P et de Q, car $P(2) = 0 = Q(2)$.
Il s'agit d'une racine simple (ou racine d'ordre 1) pour P, car $P = (X-2)(X+2)$.
C'est une racine double (ou racine d'ordre 2) pour Q car $Q = (X^2 - 4X + 4)X = (X-2)^2 X$.

Théorème (Caractérisation des racines multiples)**.** *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On a équivalence entre :*

1. *α est racine de multiplicité k de P ;*
2. $\begin{cases} P(\alpha) = P^{(1)}(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Démonstration. (Idée de la preuve) On utilise la formule de Taylor en α :

$$P = \underbrace{P(\alpha) + P^{(1)}(\alpha)(X-\alpha) + \cdots + \frac{P^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}(X-\alpha)^{k-1}}_{(1)} + \underbrace{\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n}_{(2)}$$

(1) n'est pas factorisable par $(X-\alpha)^k$, sauf si $P(\alpha) = 0 = P^{(1)}(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha)$.
(2) est factorisable par $(X-\alpha)^k$.

(Preuve) Soit k le plus petit entier naturel tel que $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Montrons qu'il s'agit de la multiplicité de α.

Par la formule de Taylor en α, en notant $n = \deg(P)$:

$$P = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i}_{=0 \text{ pour } i<k} = \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i = (X-\alpha)^k \underbrace{\sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^{i-k}}_{Q}$$

P est donc divisible par $(X-\alpha)^k$. Donc la multiplicité de α est supérieure ou égale à k.

Par ailleurs, $Q(\alpha) = \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \neq 0$. On en déduit que Q n'est pas divisible par $(X-\alpha)$. Donc, P n'est pas divisible par $(X-\alpha)^{k+1}$, ce qui implique que la multiplicité de α est strictement inférieure à $k+1$.

Finalement, la multiplicité de α est bien égale à k. □

Corollaire. *Si α est une racine d'ordre $k \geqslant 1$ de P, alors α est une racine d'ordre $k-1$ de P'.*

Démonstration. Supposons que α est une racine de P de multiplicité k. On a par le théorème précédent :

$$\begin{cases} \big(P(\alpha)=0\big) & \leftarrow \text{inutile pour } P' \\ P^{(1)}(\alpha)=0 \\ P^{(2)}(\alpha)=0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ P^{(k)}(\alpha)\neq 0 \end{cases} \qquad \text{et donc :} \qquad \begin{cases} P'(\alpha)=0 \\ (P')^{(1)}(\alpha)=0 \\ \vdots \\ (P')^{(k-2)}(\alpha)=0 \\ (P')^{(k-1)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

Ce dernier système d'égalités signifie précisément que α est une racine d'ordre $k-1$ de P', d'après le théorème précédent. □

5.3 Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

Définition. *On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est* ***scindé*** *s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1 :*

$$P = \lambda(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \lambda \in \mathbb{K} \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Exercice : Soit $P=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$. Déterminer les coefficients de P en fonction de ses racines.

Théorème. *Soit $P=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n)$ un polynôme scindé et unitaire. Alors :*

- *Le coefficient en X^{n-1} de P vaut $-s$, où $s := \alpha_1+\cdots+\alpha_n$ est la* ***somme*** *de ses racines ;*
- *Le coefficient constant de P vaut $(-1)^n p$, où $p := \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n$ est le* ***produit*** *de ses racines.*

Autrement dit :

$$P = X^n - sX^{n-1} + \cdots + (-1)^n p$$

Démonstration. Il s'agit d'un simple développement du produit $P=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$.

- Coefficient en X^{n-1} : $-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n$.
- Coefficient constant : $(-\alpha_1)(-\alpha_2)\cdots(-\alpha_n)=(-1)^n\alpha_1\cdots\alpha_n$.

□

Remarques.

1. *Si l'on ne suppose pas que P est unitaire : $P = \underbrace{\lambda}_{\text{coeff. dom.} \neq 1}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$, alors on a simplement :*

$$P = \lambda\left(X^n - sX^{n-1} + \cdots + (-1)^n p\right)$$

2. *Un cas particulier courant est celui des polynômes scindés unitaires de degré 2 : $P=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$. On a alors $P = X^2 - sX + p$.*
   On peut montrer (facilement) que, réciproquement, si l'on connait la somme et le produit de deux nombres $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$: $\begin{cases} x_1+x_2 = s \\ x_1x_2 = p \end{cases}$, alors x_1 et x_2 sont les racines du polynôme X^2-sX+p.

6 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

6.1 Étude dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème (Théorème de D'Alembert-Gauss – théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine complexe.*

Démonstration. Hors programme, et difficile. □

Corollaire. *Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Démonstration. Les polynômes de degré 1 sont clairement irréductibles. D'autre part, si un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré supérieur ou égal à 2, alors, par le théorème de D'Alembert-Gauss, il admet une racine α. On en déduit que $X - \alpha$ divise P, et donc que P n'est pas irréductible. □

Théorème (Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$)**.** *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul se factorise de façon unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme*

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-\alpha_r)^{m_r} = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *(coefficient dominant) ;*
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *sont les racines complexes distinctes de P ;*
- $m_1, \ldots, m_r$ *sont leurs multiplicités.*

Démonstration.
L'EXISTENCE d'une telle décomposition en produit de polynômes de degré 1 peut se montrer par récurrence sur le degré de P. En effet, d'après D'Alembert-Gauss, tout polynôme P de degré $n+1$ admet une racine α et se met donc sous la forme

$$P = (X-\alpha)Q \qquad \text{où } Q \text{ est de degré } n.$$

L'hérédité va donc fonctionner.

Pour l'UNICITÉ, on peut constater a posteriori que si P est de la forme

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}$$

alors nécessairement :

- λ est **le** coefficient dominant de P ;
- les α_i sont **les** racines de P, puisque ce sont les seules valeurs qui annulent P ;
- chaque m_i est **la** multiplicité de α_i car $(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise P, et $(X-\alpha_i)^{m_i+1}$ ne divise pas P. En effet, par l'absurde, si c'était le cas, il existerait $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

  $$\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} = (X-\alpha_i)^{m_i+1} \times Q$$

  d'où par simplification par $(X-\alpha_i)^{m_i}$:

  $$\prod_{k \neq i} (X-\alpha_k)^{m_k} = (X-\alpha_i) \times Q$$

  ce qui est impossible puisque α_i est une racine du polynôme de droite, et pas de celui de gauche.

Cela démontre bien que tous ces paramètres de la décomposition sont uniques. □

Remarques.

- *Ce théorème dit finalement que tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *est scindé.*
- *Dans les mêmes notations, un polynôme* B *divise* P *si et seulement s'il est de la forme*

$$B = \mu \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{n_k} \qquad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mu \in \mathbb{C}^* \\ \forall k \in [\![1, r]\!]\,,\ 0 \leqslant n_k \leqslant m_k \end{array} \right.$$

Autrement dit, on a l'équivalence :

$$\big(B \text{ divise } P \text{ dans } \mathbb{C}[X]\big) \iff \left(\begin{array}{c} \textit{Toute racine de } B \textit{ (de multiplicité } m\textit{) est aussi} \\ \textit{racine de } P \textit{ avec une multiplicité supérieure à } m \end{array} \right)$$

Exemple fondamental : la factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines de $X^n - 1$ sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n - 1 = 0$, c'est-à-dire $z^n = 1$. Ce sont donc les racines n-ièmes de l'unité, les :

$$\omega_k := e^{\frac{2ik\pi}{n}} \qquad \text{où } k \in [\![0, n-1]\!]$$

On a donc identifié n racines distinctes du polynôme $X^n - 1$, qui est de degré n, donc toutes ses racines sont simples. De plus, $X^n - 1$ est unitaire. Finalement :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$$

Pour $n = 2, 3, 4$, cela donne :

$$\begin{aligned} X^2 - 1 &= (X-1)(X+1) \\ X^3 - 1 &= (X-1)(X-j)(X-j^2) \\ X^4 - 1 &= (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \end{aligned}$$

6.2 Étude dans $\mathbb{R}[X]$

Lemme. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$*. Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *est une racine complexe de* P*, alors son conjugué* $\overline{\alpha}$ *l'est aussi.*

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$\begin{aligned} P(\overline{\alpha}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{\alpha})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\overline{\alpha^k}\right) && \leftarrow \text{produit des conjugués = conjugué du produit} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k} && \leftarrow a_k \in \mathbb{R},\ \text{donc } a_k = \overline{a_k} \\ &= \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\right)} && \leftarrow \text{somme des conjugués = conjugué de la somme} \\ &= \overline{P(\alpha)} \\ &= \overline{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lemme. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors α et $\overline{\alpha}$ ont même multiplicité.*

Démonstration. Notons $m \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de α. Par théorème, on a donc :

$$P(\alpha) = 0 = P^{(1)}(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha), \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Or, les polynômes P, $P^{(1)}, \cdots, P^{(m)}$ sont à coefficients réels, donc on peut leur appliquer le lemme précédent, ce qui donne :

$$P(\overline{\alpha}) = 0 = P^{(1)}(\overline{\alpha}) = \cdots = P^{(m-1)}(\overline{\alpha}),$$

et $P^{(m)}(\overline{\alpha}) \neq 0$, car sinon, on aurait $P^{(m)}\left(\overline{\overline{\alpha}}\right) = 0$, c-à-d $P^{(m)}(\alpha) = 0$, ce qui est faux.

Ainsi, la multiplicité de $\overline{\alpha}$ vaut donc également m. □

Théorème (Décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$)**.** *Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul se décompose de façon unique sous la forme*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^{p} Q_j^{n_j}$$

où :

- *$\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant de P ;*
- *$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines* **réelles** *de P, de multiplicité respective $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^*$;*
- *$Q_1, \ldots, Q_p$ sont des polynômes unitaires à coefficients réels, de degré 2, à discriminant strictement négatif.*
- *$n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration.
Pour l'EXISTENCE, considérons les racines complexes de P, que l'on regroupe en deux catégories :

$$\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{\text{celles qui sont réelles}} \quad , \quad \underbrace{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n}_{\text{celles qui ne sont pas réelles}}$$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de P est donc :

$$P = \underbrace{\lambda}_{\substack{\text{coeff. dom.} \\ \in \mathbb{R}^*}} \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \times \underbrace{\prod_{i=r+1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}}_{=:Q} \qquad (\star)$$

Intéressons-nous au polynôme Q. D'après les lemmes précédents, les racines complexes de Q sont du type :

$$\underbrace{\beta_1 \ , \ \overline{\beta_1}}_{\substack{\text{multiplicité} \\ \text{commune } n_1}} \ , \ \beta_2 \ , \ \overline{\beta_2} \ , \ \ldots \ , \ \underbrace{\beta_p \ , \ \overline{\beta_p}}_{\substack{\text{multiplicité} \\ \text{commune } n_p}}$$

Donc,

$$Q = \prod_{j=1}^{p} (X - \beta_j)^{n_j} (X - \overline{\beta_j})^{n_j} = \prod_{j=1}^{p} \Big(\underbrace{(X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j})}_{=:Q_j} \Big)^{n_j}$$

Or, pour chaque $j \in [\![1; p]\!]$, on remarque que :

$$Q_j = (X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j}) = X^2 - \left(\beta_j + \overline{\beta_j}\right) X + \beta_j \overline{\beta_j} = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta_j) X + |\beta_j|^2$$

Q_j est donc un polynôme à coefficients réels, de degré 2, et son discriminant est nécessairement strictement négatif, puisque ses racines (β_j et $\overline{\beta_j}$) ne sont pas réelles.

En revenant à $(\star)$, on obtient bien la forme annoncée pour P.

Pour l'UNICITÉ, si l'on suppose que P admet une factorisation du type :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^{p} Q_j^{n_j}$$

alors on peut faire le chemin en sens inverse pour montrer qu'il s'agit nécessairement de la factorisation que nous avons construite en montrant l'existence. Plus précisément :

- λ est nécessairement **le** coefficient dominant de P ;
- les α_i sont **les** racines réelles de P, puisque ce sont les seules valeurs réelles qui l'annulent (les Q_j n'ont pas de racines réelles puisque leur discriminant est < 0) ;
- chaque m_i est **la** multiplicité de α_i puisque $(X - \alpha_i)^{m_i}$ divise P, mais pas $(X - \alpha_i)^{m_i+1}$;
- chaque Q_j, étant à discriminant < 0, admet deux racines complexes non réelles conjuguées β_j et $\overline{\beta_j}$, d'où $Q_j = (X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j})$. Les β_j et $\overline{\beta_j}$ sont donc nécessairement **les** racines non réelles de P, et les n_j sont leurs multiplicités.

Il y a donc bien unicité de tous ces paramètres de la décomposition. □

Remarque. *Ce travail montre que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :*

- ▶ *les polynômes de degré 1 ;*
- ▶ *les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

Cf exo 9

7 Décomposition en éléments simples (DES) de certaines fonctions rationnelles

Définition. *Une **fonction rationnelle** est une fonction du type $f : x \mapsto \frac{N(x)}{D(x)}$ où N et D sont deux polynômes. Les racines de D s'appellent les **pôles** de f, et f n'est bien sûr pas définie en ces points.*

Théorème (DES des fonctions rationnelles à pôles simples)**.** *Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des nombres distincts deux-à-deux. Il existe $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{K}$ tels que $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$:*

$$\frac{1}{(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)} = \frac{C_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{C_n}{x - \alpha_n}$$

Démonstration. Hors programme, et pas si simple. Mais en pratique, cette démonstration est inutile, puisqu'on trouve explicitement les C_i en faisant le calcul à l'envers. On part de $\frac{C_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{C_n}{x-\alpha_n}$, on met au même dénominateur, puis on ajuste les C_i de façon à ce que le numérateur vaille 1. Ce théorème théorique assure simplement que cette méthode marchera toujours. □

Remarque. *Les DES lorsque des pôles sont des racines multiples de D sont plus complexes. Par exemple, si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ (distincts), il existe $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$:*

$$\frac{1}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)^2} = \frac{C_1}{x - \alpha_1} + \frac{C_2}{x - \alpha_2} + \frac{C_3}{(x - \alpha_2)^2}$$

Tout ceci est hors programme, et sera donc toujours guidé par un exercice s'il en a besoin.